Παρατηρήσεις

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 18/04/21

ΖΗΤΗΜΑ Α

Α) Σχολικό σελ 162 Β) Σχολικό σελ. 144

Γ) (Α) Είναι τα εσωτερικά σημεία του A_f στα οποία μηδενίζεται η f'

(2) $x \in (-2,0)$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή f συνεχής στο $[-2,0]$ είναι $\uparrow$ ομοίως $f \downarrow$ στο $[0,2]$

Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(-2)=0$, τοπικό μέγιστο το $f(0)=4$ και τοπικό ελάχιστο το $f(2)=0$

(3) $f \cup$ στα $[-2,-1]$ και $[1,2]$, $f \cap$ στο $[-1,1]$

Σ.Κ. τα -1 και 1

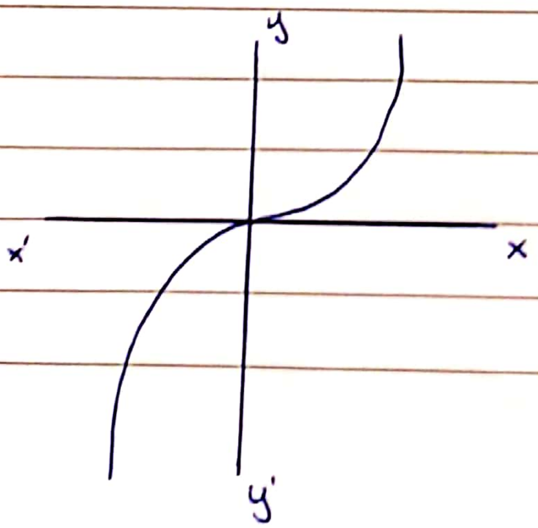
(4) Η f' μηδενίζεται στο 0, το οποίο είναι ακρότατο της, είναι εσωτερικό σημείο του A_f και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό άρα (Γ)

ΖΗΤΗΜΑ Β

Είναι $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$

1) $$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \\ &\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2}{x} = 0 \end{aligned}\right\} f'(0)=0$$

2)



Παρατηρήσεις

3) Για $x\geq 0$: $f'(x)=2x>0$ για κάθε $x>0$ κι επειδή f συνεχής στο 0, $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$ άρα 1-1

με $f([0,+\infty)) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [0,+\infty)$

Για $x<0$: $f'(x)=-2x>0$ άρα $f\uparrow$ στο $(-\infty,0)$ κι 1-1

με $f((-\infty,0)) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to 0} f(x)) = (-\infty,0)$

κι επειδή $f((-\infty,0))\cap f([0,+\infty))=\emptyset$ f 1-1 άρα αντιστρέφεται

Για $x\geq 0$: $y=f(x) \Leftrightarrow y=x^2 \overset{y\geq 0}{\Longleftrightarrow} x=\sqrt{y}$

Για $x<0$: $y=f(x) \Leftrightarrow y=-x^2 \Leftrightarrow x^2=-y \Leftrightarrow x=-\sqrt{-y}$

άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 0\\ -\sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$

4) $x\geq 0$: $f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow x^2=\sqrt{x} \Leftrightarrow x^4=x \Leftrightarrow x^4-x=0 \Leftrightarrow$

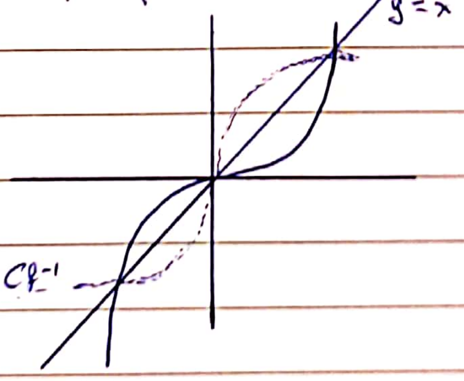
$x(x^3-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ άρα $A(0,0)$ κι $B(1,1)$

Για $x<0$: $f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow -x^2=-\sqrt{-x} \Leftrightarrow x^2=\sqrt{-x} \Leftrightarrow x^4=-x \Leftrightarrow$

$x^4+x=0 \Leftrightarrow x(x^3+1)=0 \overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} x^3+1=0 \Leftrightarrow x^3=-1 \Leftrightarrow x=-1$

άρα $\Gamma(-1,-1)$

5) Είναι η συμμετρική της C_f ως προς την $y=x$



6) i) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{-x^2}=-\infty$

Δεν υπάρχει το όριο

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

ii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\sigma\upsilon\nu 2x)(1+\sigma\upsilon\nu 2x)}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu 2x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 2x}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu 2x)} =$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu^2 2x}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu 2x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu^2 2x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu 2x} = 4 \cdot \frac{1}{1+1} = 2$, γιατί

$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\eta\mu 2x}{x}\right)^2 \overset{\substack{2x=u \\ x\to 0^+ \\ u\to 0^+}}{=} \lim_{u\to 0^+} \left(\frac{\eta\mu u}{\frac{u}{2}}\right)^2 = 4$

iii) $\lim_{x\to 1} \frac{|f(x)-1|}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{|x^2-1|}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{|x-1||x+1|}{|x-1|^2} = \lim_{x\to 1} \frac{|x+1|}{|x-1|} =$

$+\infty$ γιατί $|x-1|>0$ κοντά στο 1.

ΖΗΤΗΜΑ Γ

1) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e$

x	0		e	
f'	‖	+		−
f	‖	↗		↘

$A_1 = (0, e]$ f συνεχής κ' ↑ άρα

$f(A_1) = (\lim_{x\to 0^+} f(x), f(e)] = (-\infty, \frac{1}{e}]$

γιατί $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x}\right) \overset{(-\infty)(+\infty)}{=} -\infty$

$A_2 = [e, +\infty)$ f συνεχής κ' ↓ άρα

$f(A_2) = (\lim_{x\to +\infty} f(x), f(e)] = (0, \frac{1}{e}]$ άρα $f(A) = (-\infty, \frac{1}{e}]$

2) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ άρα η $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ άρα η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

3) Η εφαπτομένη στο Μ: $y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$ κ' επειδή

διέρχεται από το $(-1, 0)$ τότε

$-f(\xi) = f'(\xi)(-1-\xi) \Leftrightarrow -\frac{\ln\xi}{\xi} = \frac{1-\ln\xi}{\xi^2}(-1-\xi) \Leftrightarrow$

$-\frac{\ln\xi}{\xi} = \frac{\ln\xi - 1}{\xi^2} + \frac{\ln\xi - 1}{\xi} \Leftrightarrow -\xi\ln\xi = \ln\xi - 1 + \xi\ln\xi - \xi \Leftrightarrow$

$2\xi\ln\xi + \ln\xi - \xi - 1 = 0$

Έστω $h(x) = 2x\ln x + \ln x - x - 1$ στο $[1,e]$

h συνεχής στο $[1,e]$ ως πράξη συνεχών

$\left.\begin{array}{l} h(1) = -2 \\ h(e) = 2e + 1 - e - 1 = e \end{array}\right\} h(1)\cdot h(e) < 0$ Bolzano

4) Είναι $f(x) \leq \frac{1}{e}$ για κάθε $x > 0$ ισχ.

$\left.\begin{array}{l} f(x) \leq \frac{1}{e} \\ f\left(\frac{x^6}{e^5}\right) \leq \frac{1}{e} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} f(x) + f\left(\frac{x^6}{e^5}\right) \leq \frac{2}{e}$

ισχ. $f(x) + f\left(\frac{x^6}{e^5}\right) = \frac{2}{e} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{e} \\ 5' \\ f\left(\frac{x^6}{e^5}\right) = \frac{1}{e} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = e \\ \\ \frac{x^6}{e^5} = e \Leftrightarrow x = e \end{array}\right.$

ισχ. $x = e$

5) $f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3} > 0$ για $x > \sqrt{e^3}$

$[x, x+1] \xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} f'(\xi_1) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$

$\xi_1 < x+1 \xrightarrow{f'\uparrow} f'(\xi_1) < f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$ (1)

$[x+1, x+2] \xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} f'(\xi_2) = f(x+2) - f(x+1)$

$x+1 < \xi_2 \xrightarrow{f'\uparrow} f'(x+1) < f'(\xi_2)$ (2) (1), (2) $\Rightarrow$ ζητούμενο

Scanned with CamScanner

Παρατηρήσεις

ΖΗΤΗΜΑ Δ

1) $f'(x) = 2xe^x + (x^2+1)e^x = e^x(x^2+2x+1) = e^x(x+1)^2 > 0$

για κάθε $x \neq -1$ κ' επειδή f συνεχής στο -1 $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$

$f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0, +\infty)$ γιατί

• $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2+1)e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{e^{-x}} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \underset{DLH}{=}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$. κ' $\lim_{x\to+\infty} (x^2+1)e^x \overset{(+\infty)(+\infty)}{=} +\infty$

2) $f''(x) = e^x(x+1)^2 + 2e^x(x+1) = e^x(x+1)(x+3)$

		-3		-1	
f''	$+$		$-$		$+$
f	∪		∩		∪
		Σ.Κ		Σ.Κ	

3) Πρέπει $f'(x) = 1$ (1)

		-3		-1	
f''	$+$		$-$		$+$
f'	↗		↘		↗

Είναι $f'(0) = 1$ άρα η $x = 0$ ρίζα της (1) στο $[-1, +\infty)$ κ' επειδή $f' \uparrow$ στο $[-1, +\infty)$ η ρίζα μοναδική στο $[-1, +\infty)$

Για $x < -1$: είναι $f'(x) \le f'(-3) \Leftrightarrow f'(x) \le \frac{4}{e^3} < 1$ άρα η (1) αδύνατη για $x < -1$ Επομένως η $f'(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

Άρα η εφαπτομένη είναι η $y = x + 1$

4) f ∪ στο $[-1, +\infty)$ κ' $y = x+1$ η εφαπτομένη άρα $f(x) \geq x + 1$

Για $x < -1$: είναι $x < -1 \Leftrightarrow x + 1 < 0$ κ' $f(x) > 0$ άρα $f(x) > x + 1$

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq x + 1$

Παρατηρήσεις

5) Για $x=1$: $2f(1) = f(1)+2e \Leftrightarrow 2f(1) = 2f(1)$ ισχύει ως ισότητα

Για $x>1$ είναι $1<x<x^2$

$[1,x] \xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} f'(\xi_1) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{f(x)-2e}{x-1}$

$[x,x^2] \xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} f'(\xi_2) = \dfrac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}$

$\xi_1 < \xi_2 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-2e}{x-1} < \dfrac{f(x^2)-f(x)}{x(x-1)} \xrightarrow{x>1}$

$x(f(x)-2e) < f(x^2)-f(x) \Leftrightarrow x f(x) - 2ex < f(x^2) - f(x) \Leftrightarrow$

$x f(x) + f(x) < f(x^2) + 2ex \Leftrightarrow (x+1)f(x) < f(x^2)+2ex$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+2}{f(x)-x-1} = \lim\limits_{x\to 0} (x+2)\dfrac{1}{f(x)-(x+1)} = +\infty$, διότι

- $\lim\limits_{x\to 0}(x+2) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)-(x+1) = 0$ και $f(x) > x+1$ κοντά στο 0 διότι

  $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{f(x)-(x+1)} = +\infty$

  C_f [illegible] $y = x+1$, εφαπτομένη